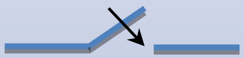
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Лектор:
к.ф.-м.н.,асс.профессор Алимгазинова Назгуль Шакаримовна

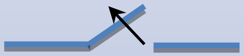
7 лекция. Переходные процессы в линейных электрических цепях

Переходным процессом *(ПП) называют процессы перехода от одного режима работы ЭЦ (обычно периодического) к другому (обычно также периодическому), чем-либо отличающемуся от предыдущего, например, величиной амплитуды, фазы, формой или частотой действующей в схеме ЭДС, значениями параметров схемы, а также вследствие изменения конфигурации цепи.*

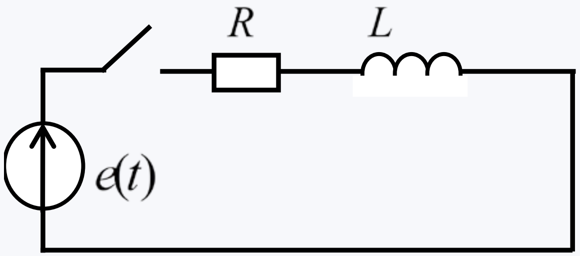
Коммутация – это процесс замыкания или размыкания ключей.



а)замыкание ключа



б) размыкание ключа



$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$u_L + iR = e,$$

$$L\frac{di}{dt} + iR = e,$$

$$i = E/R$$

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0.$$

$$i(t) = i_{пр} + i_{св}$$

$$i_{св} = Ae^{pt}$$

принужденная составляющая

$$i_{пр} = E/R$$

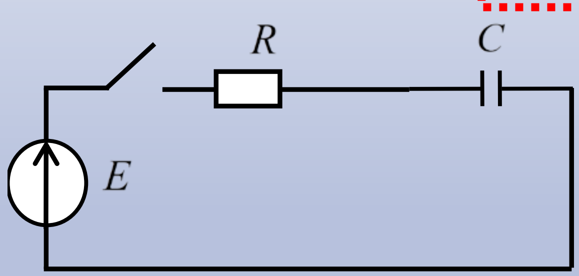
свободная составляющая

$$t = 0$$

$$A = \frac{E}{R}, \quad p = -\frac{R}{L}$$

Полный ток

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$



$$iR + u_C = E$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

$$i = \frac{dq}{dt},$$

$$q = u_C C,$$

$$i = C\frac{du_C}{dt},$$

Полное напряжение

$$u(t) = u_{пр} + u_{св}$$

Принужденная составляющая величины *(тока или напряжения) физически представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующая в схеме принуждающая ЭДС.*

Свободная составляющая величины *(тока или напряжения) физически представляет собой составляющую свободную от вынуждающей силы.*

Полный ток - *ток, который в действительности протекает по той или иной ветви цепи при переходном процессе.* ***Полное напряжение*** - *напряжение, которое в действительности имеется между некоторыми точками электрической цепи при переходном процессе.* i u

Время $t=0_{-}$ представляет собой время непосредственно до коммутации, $t=0$ - время в момент коммутации, $t=0_{+}$ - время в первый момент после коммутации.

ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ

Первый закон коммутации:

Ток, протекающий через индуктивный элемент непосредственно до коммутации $i_L(0\_)$ равен току, протекающему через тот же индуктивный элемент непосредственно после коммутации $i_L(0_+)$:

$$\boxed{i_L(0_-) = i_L(0_+)}$$

Второй закон коммутации:

Напряжение на емкостном элементе непосредственно до коммутации $u_C(0\_)$ равно напряжению на том же емкостном элементе непосредственно после коммутации $u_C(0_+)$:

$$\boxed{u_C(0_-) = u_C(0_+)}$$

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Классический

Операторный

Частотный метод

Метод расчета с помощью интеграла Дюамеля

Метод переменных состояния

Общие этапы применения методов:

1. ***Выбирают положительные направления токов в ветвях электрической цепи.***

2. ***Определяют начальные условия: значения токов и напряжений непосредственно до коммутации.***

3. ***Составляют характеристическое уравнение и определяют его корни.***

4. ***Получают выражения для искомых токов и напряжений как функции времени.***

КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД

Классический метод *заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи.*

Этапы применения классического метода расчета переходных процессов:

1. Выбирают положительные направления токов в ветвях электрической цепи.
2. Определяют начальные условия: значения токов и напряжений непосредственно до коммутации.
3. Составляют систему уравнений по законам Кирхгофа.
4. Определяют принужденные значения токов и напряжений в цепи.
5. Записывают систему уравнений для свободных составляющих токов. Составляют характеристическое уравнение и определяют его корни.
6. Получают выражения для искомых токов и напряжений как функции времени в виде суммы принужденной и свободной составляющих.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Степень характеристического уравнения *равна числу основных независимых начальных значений в послекоммутационной схеме после максимального её упрощения и не зависит от вида ЭДС источников ЭДС в схеме*

$$\boxed{\nu = n_L + n_C - m_L - k_C,}$$

n_L - число индуктивностей в схеме, n_C - число емкостей, m_L - число индуктивностей, токи в которых не могут быть заданы произвольно (или же это число узлов, в которых сходятся только ветви, содержащие катушки индуктивности), k_C - число емкостей, напряжения на которых не могут быть заданы произвольно (или же число контуров схемы, ветви которых содержат только конденсаторы).

1. Если характеристическое уравнение цепи представляет собой ***уравнение первой степени****, тогда параметр затухания имеет одно значение, которое одинаково для всех токов ветвей схемы, т.е. вся цепь, охвачена единым переходным процессом и уравнение для свободной составляющей тока*

$$\boxed{i_{св} = Ae^{pt}.}$$

Постоянная интегрирования А определяется по значению свободного тока при t = 0

$$\boxed{i_{св}(0) = A.}$$

2. Если дано характеристическое уравнение ***второй степени*** *и его корни действительны и не равны, то*

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

$$i'_{св} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

$t = 0$

$$\begin{cases} i_{св}(0) = A_1 + A_2, \\ i'_{св}(0) = A_1 p_1 + A_2 p_2, \end{cases}$$

$i_{св}(0)$, $i'_{св}(0)$, p_1, p_2 - известные величины.

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{i'_{св}(0) - p_2 i_{св}(0)}{p_1 - p_2}, \\ A_2 = i_{св}(0) - A_1. \end{cases}$$

3. Если корни характеристического уравнения являются ***комплексно-сопряженными,*** *то*

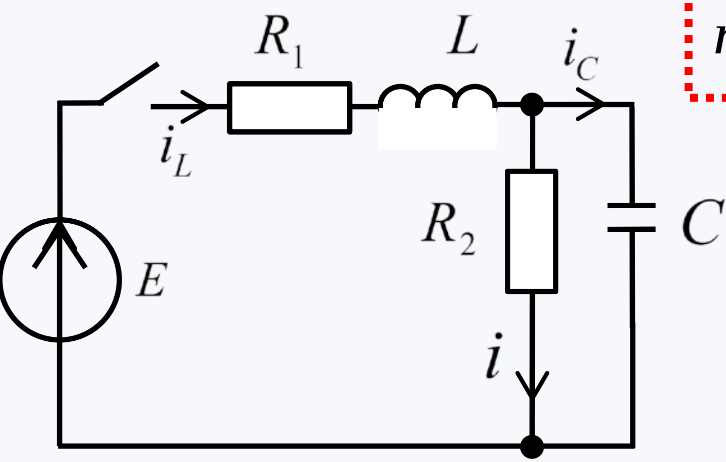
$$i_{св} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu),$$

ω_0 - циклическая частота и коэффициент затухания δ

$$i'_{св} = -A\delta e^{-\delta t}\sin(\omega_0 + \nu) + -A\omega_0 e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu).$$

$t = 0$

$$\begin{cases} i_{св}(0) = A\sin(\nu), \\ i'(0) = -A\delta\sin(\nu) + -A\omega_0\sin(\nu). \end{cases}$$



$$m=2,\quad n=3,\quad n_{ИТ}=0,\; k=n-m-n_{ИТ}+1=2.$$

$t=0_-$

$i_L(0_-)=0,$

$i_C(0_-)=0,$

$i_L(0_-)=i+i_C$

$i(0_-)=0$

$u_C(0_-)=i(0_-)\cdot R_2,$

$u_C(0_-)=0.$

$t=0_+$

$$\begin{cases} i_L-i-i_C=0, \\ i_L R_1+L\dfrac{di_L}{dt}+iR_2=E, \\ \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C dt-iR_2=0. \end{cases}$$

$i(t)=i_{пр}+i_{св}$

Для принужденных составляющих

$$\begin{cases} i_{L,np} - i_{np} - \boxed{i_{C,np}} = 0, \\ i_{L,np} R_1 + \boxed{L \dfrac{di_{L,np}}{dt}} + i_{np} R_2 = E, \\ u_{C,np} - i_{np} R_2 = 0. \end{cases}$$

$E = const$

$i_{C,np} = 0$

$u_{L,np} = L \dfrac{di_{L,np}}{dt} = 0$

$i_{L,np} - ?$

$u_{C,np} - ?$

$$\begin{cases} i_{L,np} - i_{np} = 0, \\ i_{L,np} R_1 + i_{np} R_2 = E. \end{cases}$$

$u_{C,np} = i_{np} R_2$

$$i_{L,np} = i_{np} = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$$u_{C,np} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Для свободных составляющих

$$\begin{cases} i_{L,св} - i_{св} - i_{C,св} = 0, \\ i_{L,св} R_1 + L\dfrac{di_{L,св}}{dt} + i_{св} R_2 = 0, \\ \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_{C,св} dt - i_{св} R_2 = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{i_{св} = Ae^{pt}}$$

$$L\frac{di_{L,св}}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(Ae^{pt}\right) = Lp\left(Ae^{pt}\right) = Lp \cdot i_{L,св},$$

$$\frac{1}{C}\int i_{C,св} dt = \frac{1}{C}\int Ae^{pt} dt = \frac{1}{Cp} \cdot Ae^{pt} = \frac{1}{Cp} \cdot i_{C,св}.$$

$$\begin{cases} i_{L,св} - i_{св} - i_{C,св} = 0, \\ i_{L,св} R_1 + Lpi_{L,св} + i_{св} R_2 = 0, \\ \dfrac{1}{Cp} i_{C,св} dt - i_{св} R_2 = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta = 0}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 + Lp & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & \dfrac{1}{Cp} \end{vmatrix} = 1 \cdot R_2 \cdot \frac{1}{Cp} + R_2(R_1 + Lp) + (R_1 + Lp)\frac{1}{Cp} = 0$$

$$\boxed{p^2 LCR_2 + p(CR_2R_1 + L) + (R_1 + R_2) = 0} \dashrightarrow \boxed{p_1, p_2}$$

$$i_{L,св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \qquad u_{C,св} = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}.$$

$$\boxed{t = 0} \dashrightarrow \boxed{A_1, A_2, B_1, B_2}$$

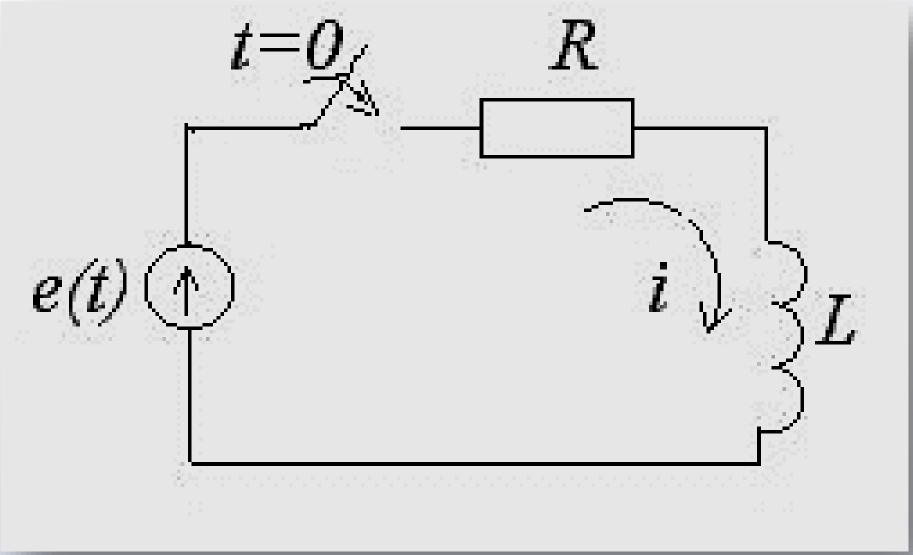
$$i_L(t) = i_{L,пр} + i_{L,св},$$

$$i(t) = i_{пр} + i_{св},$$

$$i_C(t) = i_{C,пр} + i_{C,св}.$$

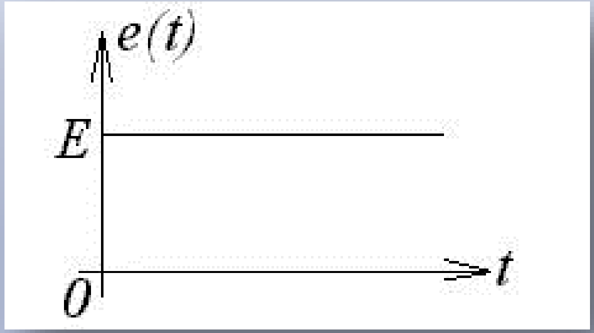
$$\boxed{u_C(t) = u_{C,пр} + u_{C,св}.}$$

Переходные процессы в *RL*-цепи



$$Ri + L\frac{di}{dt} = e(t),$$

а) Если подана постоянная ЭДС



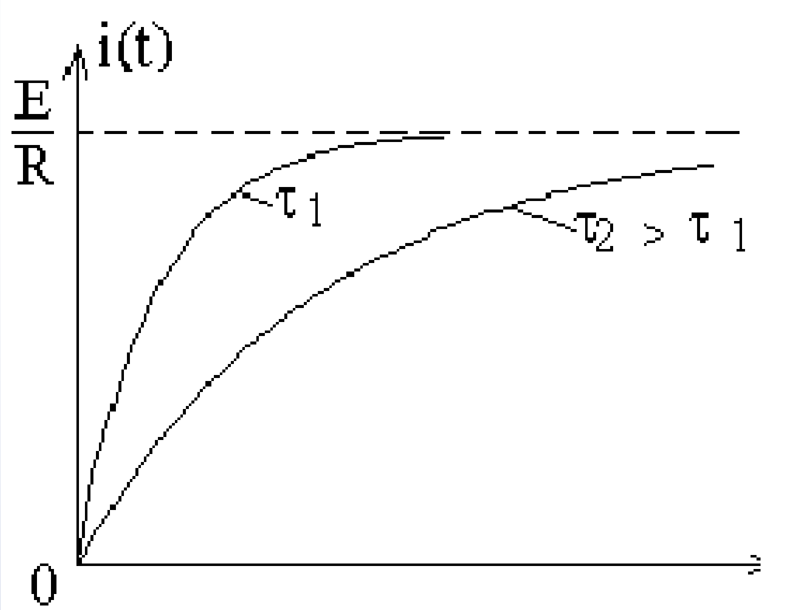
$$e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E & t > 0 \end{cases}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} + A\,e^{pt},$$

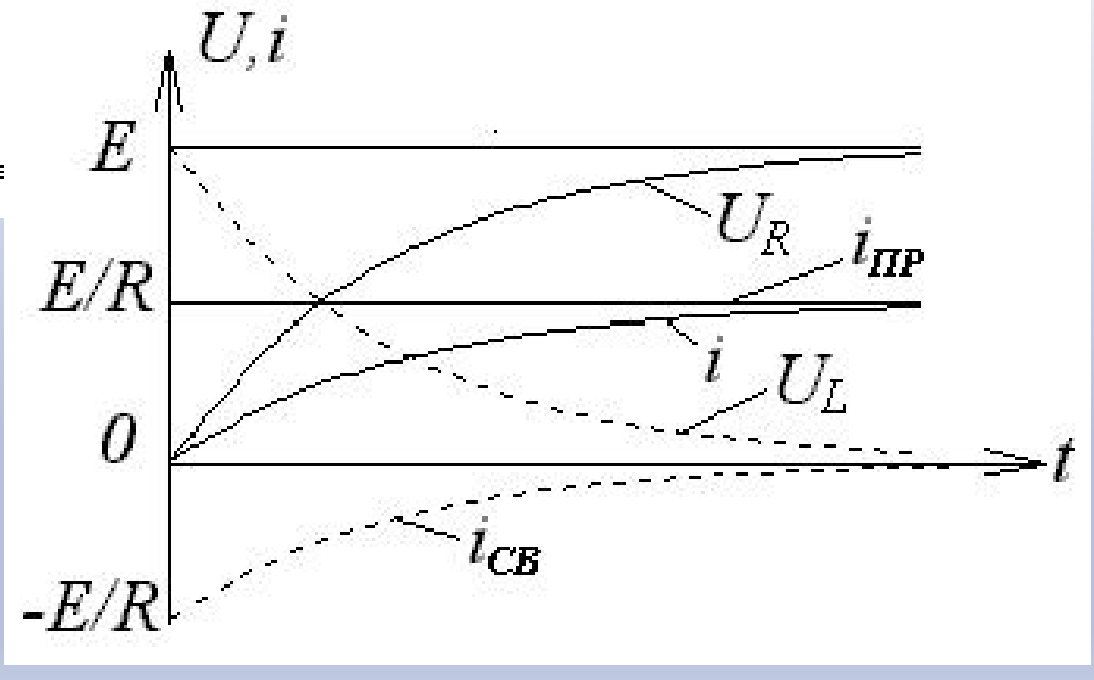
$$A = -E / R$$

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$U_L(t) = L\frac{di}{dt} = Ee^{-\frac{R}{L}t}.$$



$$U_R(t) = Ri = E(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$



$$\tau_L = L / R$$

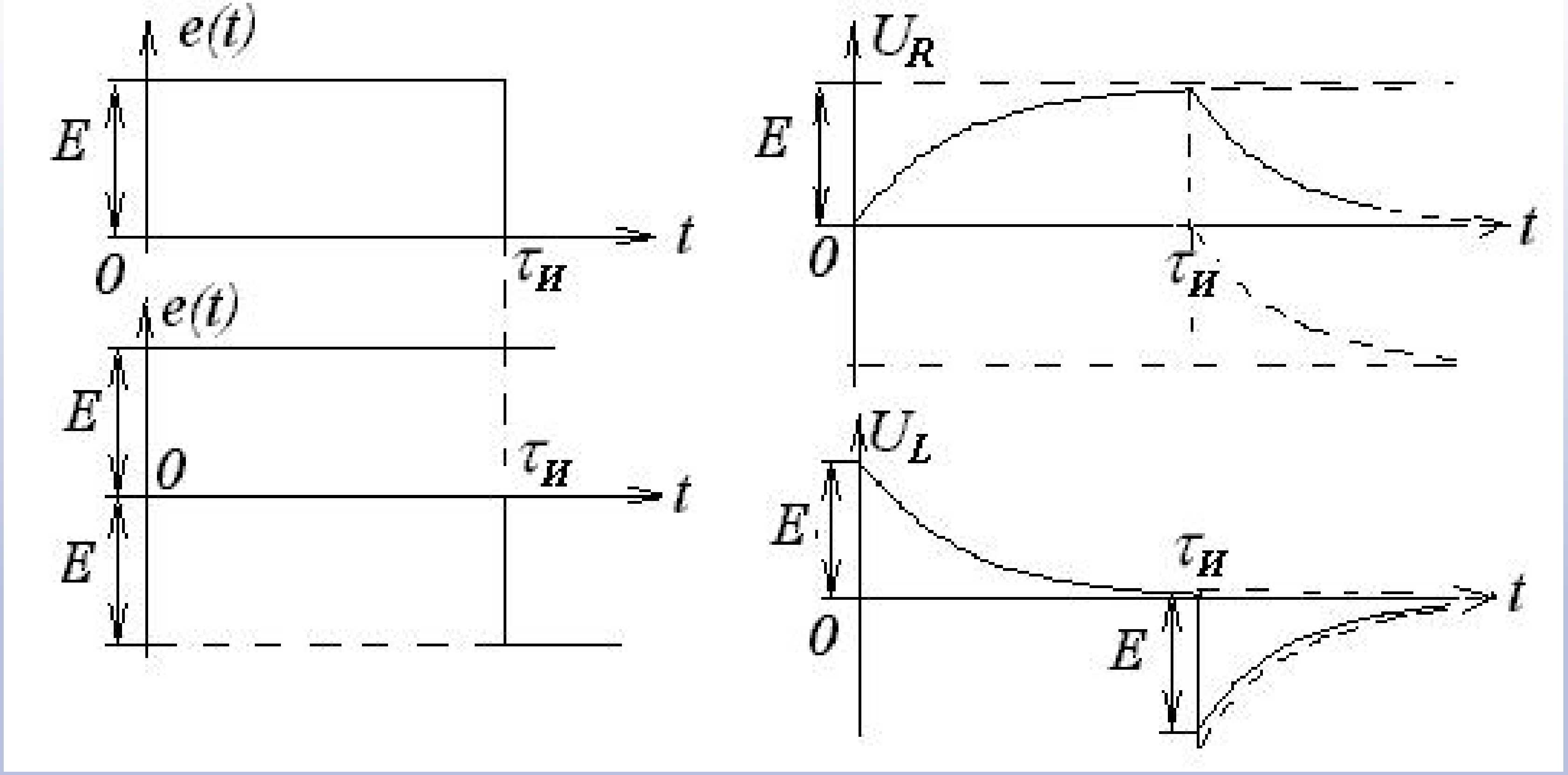
Постоянная времени

RL - цепи

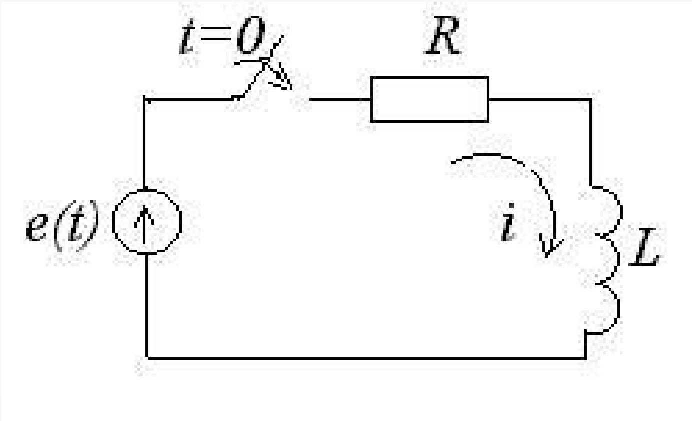
$$i(\tau_L) = I(1 - e^{-1}) \approx 0,632\, I,$$

$$\frac{E}{R} = I,$$

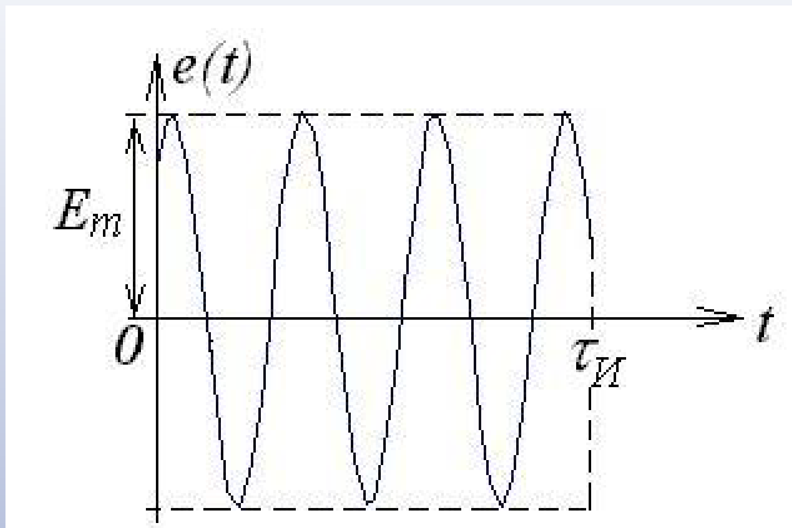
$$i_{\text{св}}(\tau_L) = Ie^{-1} \approx 0,368\, I,$$



б) Если подана переменная ЭДС



$$Ri + L\frac{di}{dt} = e(t),$$



$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$i_{пр}(t) = I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi)$$

$$I_m = \frac{E_m}{|Z|}$$

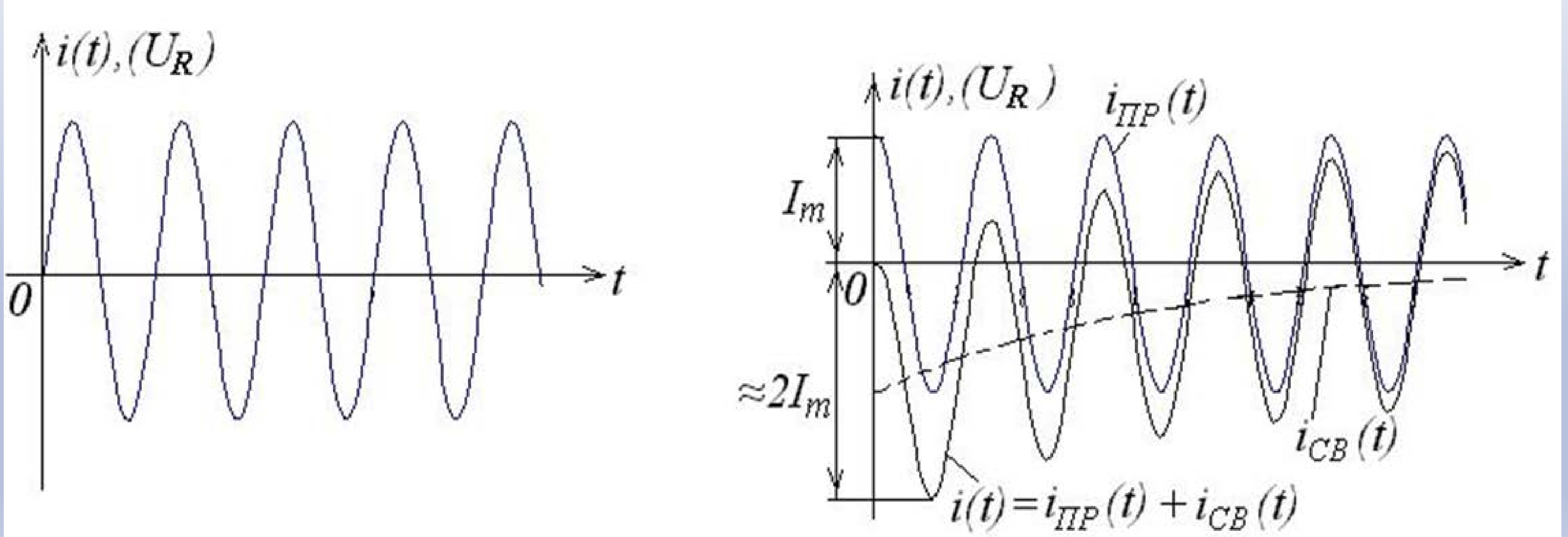
$$Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\frac{\omega L}{R})$$

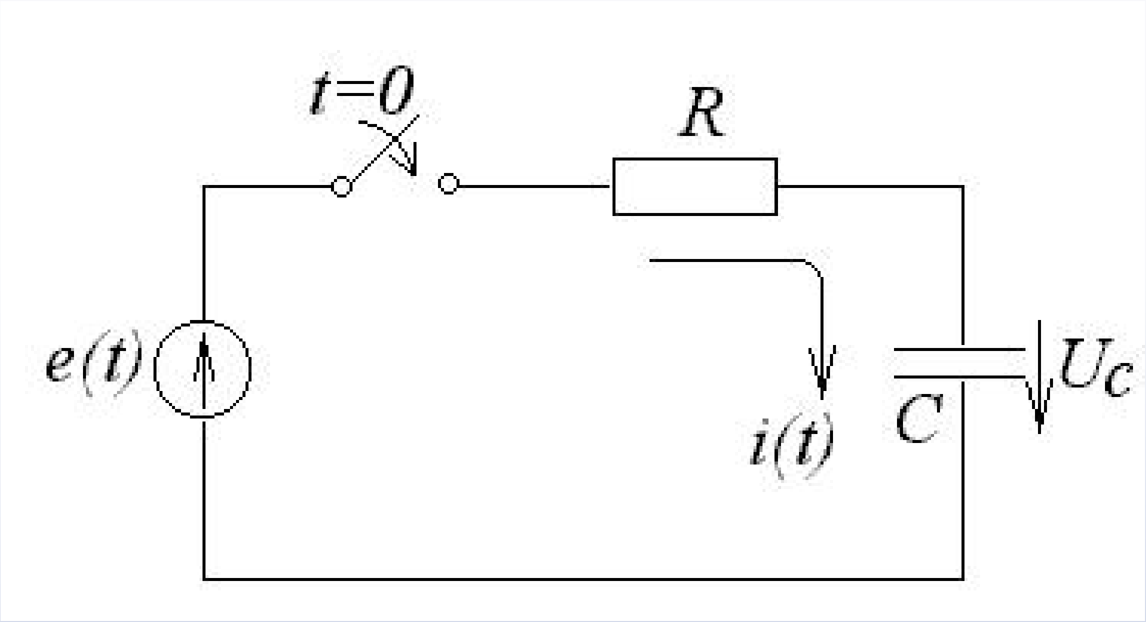
$$i(t) = I_m[\cos(\omega t + \psi - \varphi) - \cos(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau_L}}]$$

$$U_R(t) = Ri(t) = RI_m[\cos(\omega t + \psi - \varphi) - \cos(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau_L}}].$$

$$U_L(t) = L\frac{di}{dt} = I_m[-\omega L \sin(\omega t + \psi - \varphi) - R\cos(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau_L}}].$$



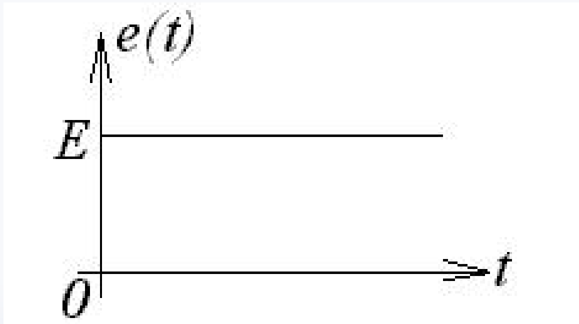
Переходные процессы в *RC*-цепи



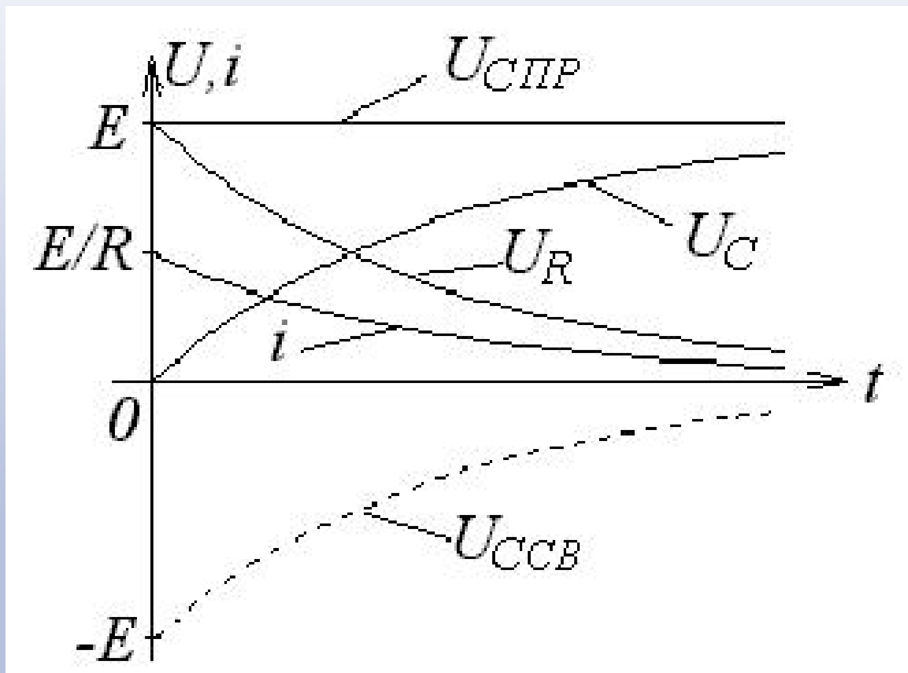
$$i(t) = C\frac{dU_C}{dt},$$

$$e(t) = RC\frac{dU_C}{dt} + U_C.$$

а) Если подана постоянная ЭДС



$$e(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ E & t>0\end{cases}$$



$$U_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right),$$

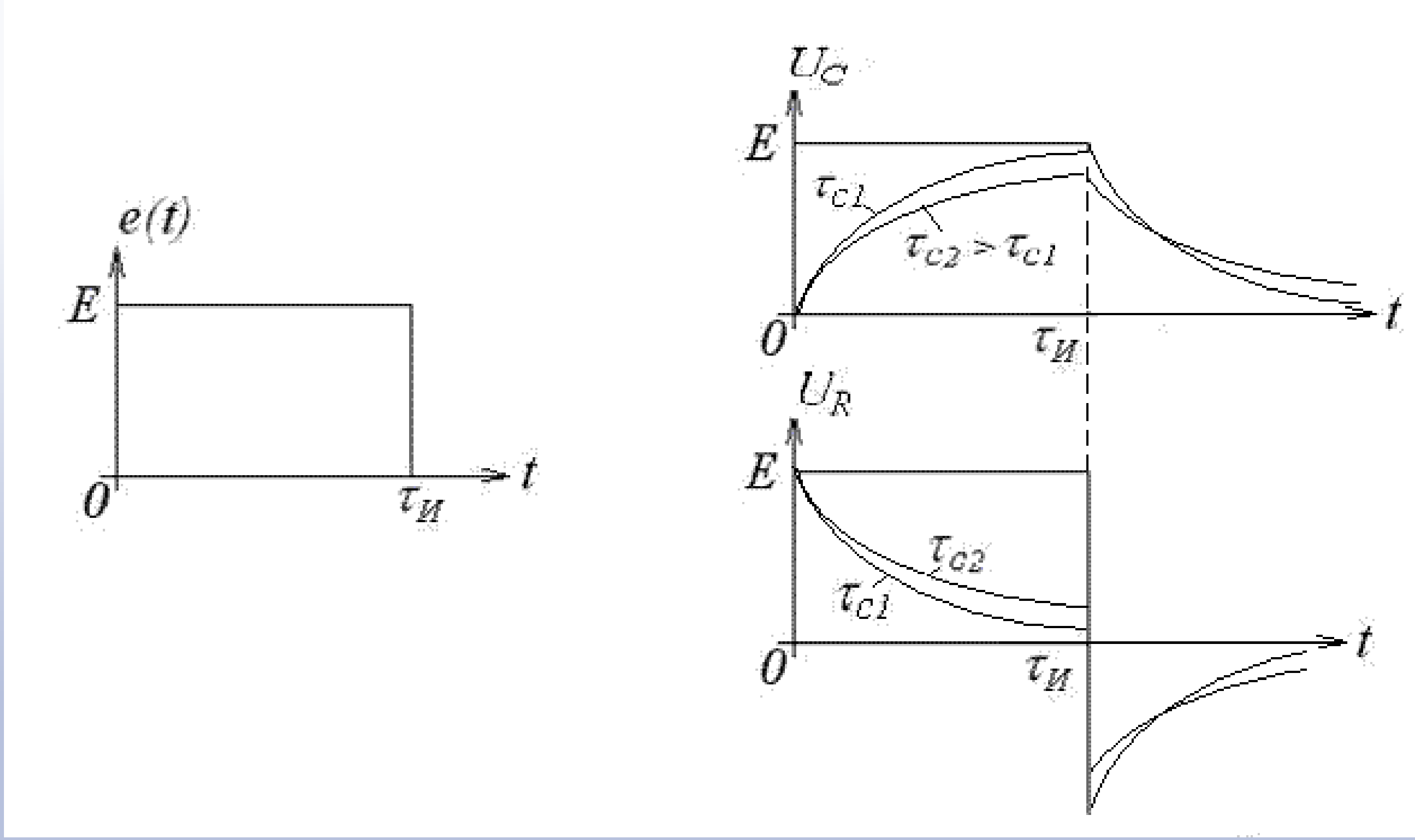
$$i(t)=C\frac{dU_C}{dt}=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau_C}},$$

$$U_R(t)=Ri(t)=Ee^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

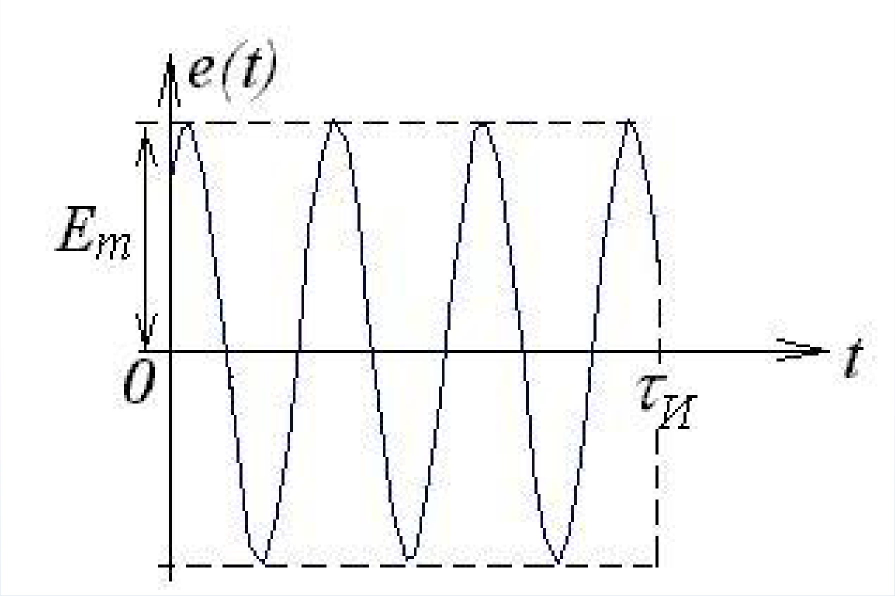
$\tau_C = RC,$

Постоянная времени

RC - цепи



б) Если подана переменная ЭДС



$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$U_{СПР} = U_m \cos(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

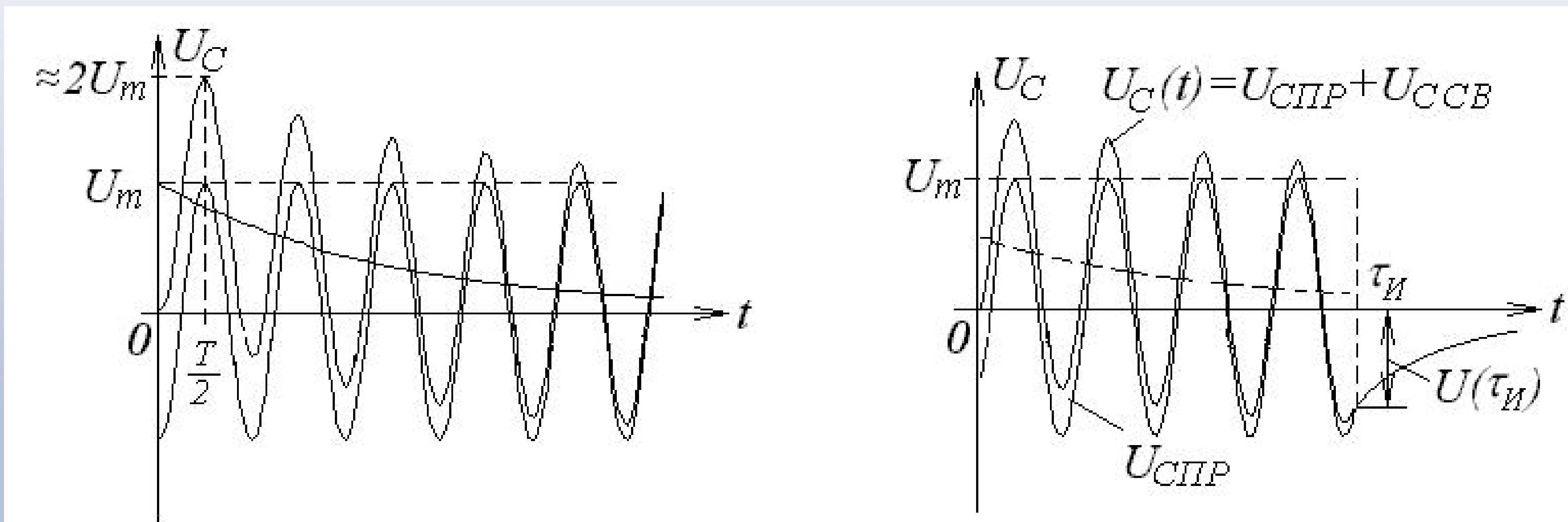
$$U_m = \frac{E_m}{|Z|} \frac{1}{\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$

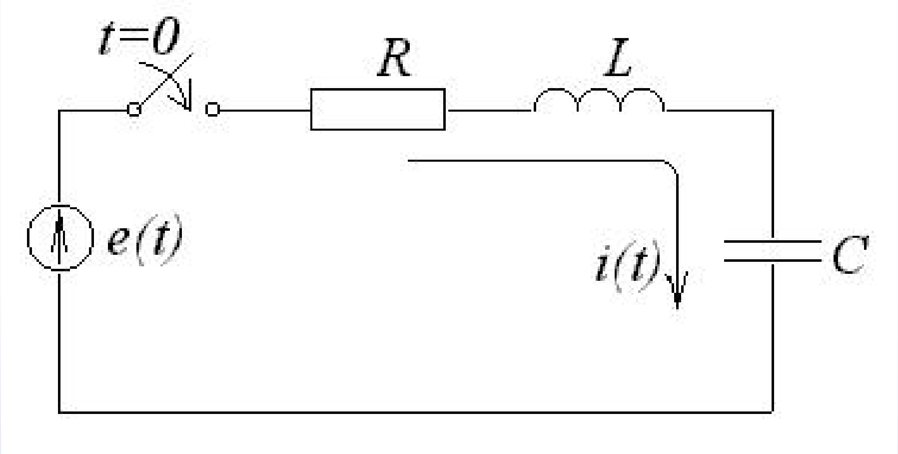
$$\varphi = arctg(-\frac{1}{\omega CR})$$

$$U_C(t) = U_m\left[\cos\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\varphi - \psi)e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right]$$

$$i(t) = C\frac{dU_C}{dt} = -\,CU_m\left[\omega\sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{RC}\sin(\varphi - \psi)e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right]$$



Переходные процессы в *RLC*-цепи



$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = e(t),$$

$$i(t) = i_{ПР}(t) + i_{СВ}(t).$$

$$i_{СВ}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

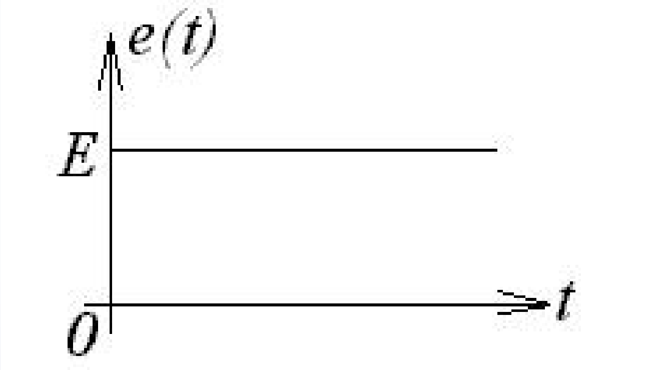
$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}},$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

$$\delta = \frac{R}{2L},$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а) Если подана постоянная ЭДС



$$e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E & t > 0 \end{cases}$$

$$i_{\text{ПР}}(t) = 0$$

$$i(t) = i_{\text{СВ}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

$$\frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

$$t = 0$$

$$e(0) = Ri(0) + L\frac{di}{dt}(0) + U_C(0),$$

$$i_L(0) = i_L(0-) = 0, \qquad U_C(0) = U_C(0-) = 0$$

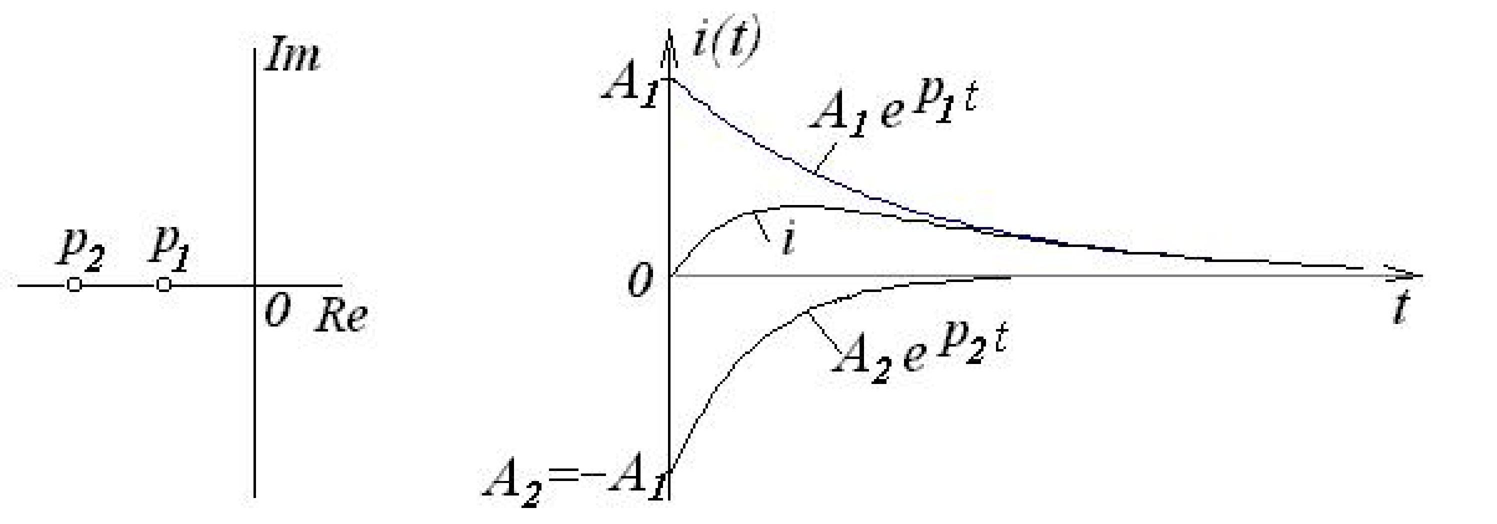
$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 = \dfrac{E}{L}, \end{cases} \qquad A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(p_1 - p_2)},$$

$$i(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right).$$

$$a)\ \delta > \omega_0, \quad \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\rho, \quad Q = \frac{\rho}{R} < 0.5$$

(апериодический процесс)



$$U_R = Ri(t) = \frac{ER}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$U_L = L\frac{di}{dt} = \frac{E}{(p_1 - p_2)}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

$$U_C = E - U_R - U_L = E\left[1 + \frac{1}{(p_1 - p_2)}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})\right]$$

б) $\delta = \omega_0$, $R = 2\,\rho$, $Q = 0{,}5$ (критический режим)

$$p_{1,2} = -\,\delta$$

$$i(t) = \lim_{p_1 \to p_2} \frac{E}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right) = \frac{E}{L} t\, e^{-\delta t}$$

при ненулевых начальных условиях

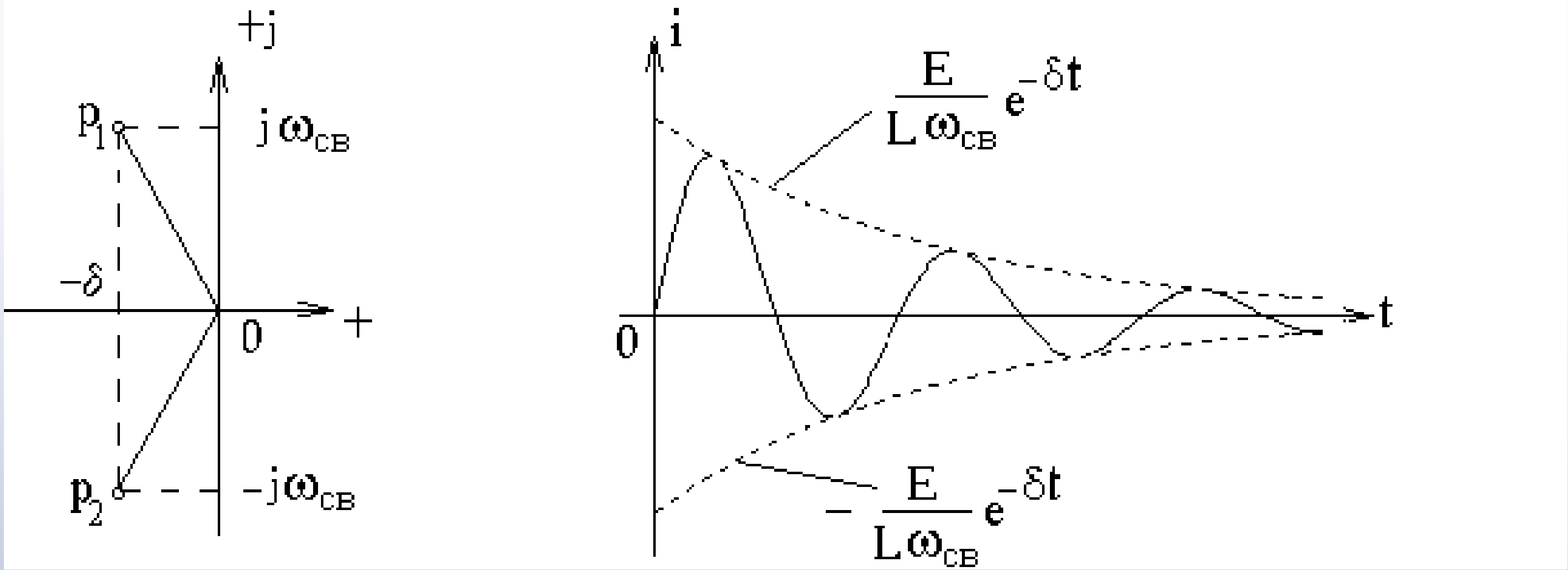
$$i(t) = \lim_{p_1 \to p_2} \frac{E - U}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right) = \frac{E - U}{L} t\, e^{-\delta t}$$

$$i(t) = \lim_{p_1 \to p_2 = -\delta} \frac{\varphi'(p_1)}{\psi'(p_1)} = \lim_{p_1 \to -\delta} \frac{E\, t\, e^{-p_1 t}}{L} = \frac{E}{L} t\, e^{-\delta t})$$

в) $\delta < \omega_0$, $R < 2\rho$, $Q > 0{,}5$, $p_{1,2} = -\delta \pm j$

(колебательный процесс)

$$\omega_{СВ} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$



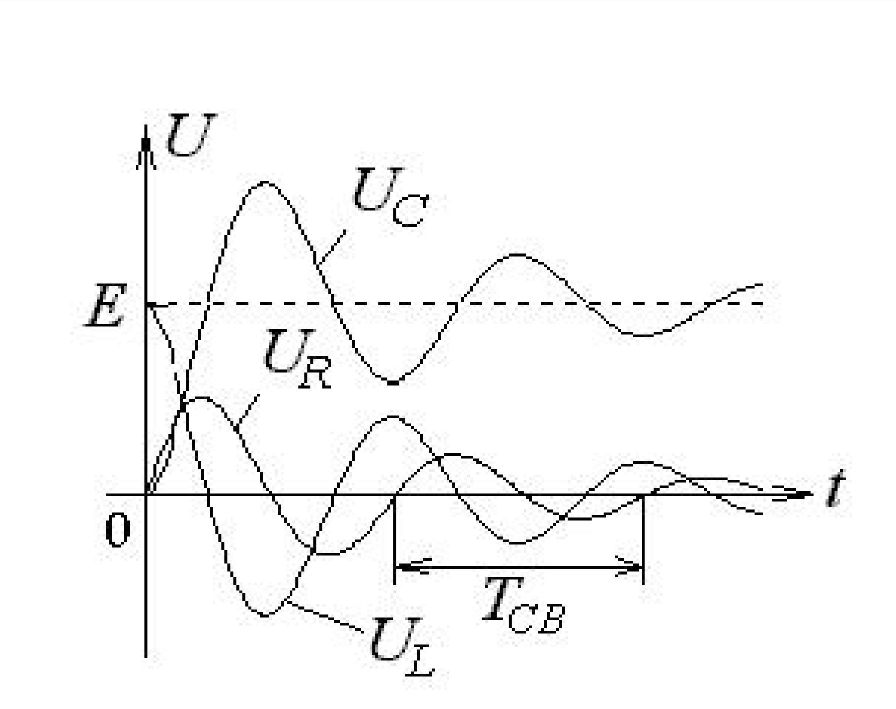
$$i(t) = \frac{E}{2j\omega_{СВ} L}\left(e^{(-\delta + j\omega_{СВ})t} - e^{(-\delta - j\omega_{СВ})t}\right) =$$

$$= \frac{E}{2j\omega_{СВ} L} e^{-\delta t}(\cos\omega_{СВ} t + j\sin\omega_{СВ} t - \cos\omega_{СВ} t + j\sin\omega_{СВ} t) = \frac{E}{\omega_{СВ} L} e^{-\delta t} \sin\omega_{СВ} t$$

$$U_R = Ri = \frac{ER}{\omega_{\text{СВ}} L} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{СВ}} t$$

$$U_L = L\frac{di}{dt} = -\frac{\omega_0}{\omega_{\text{СВ}}} E e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{СВ}} t - \varphi)$$

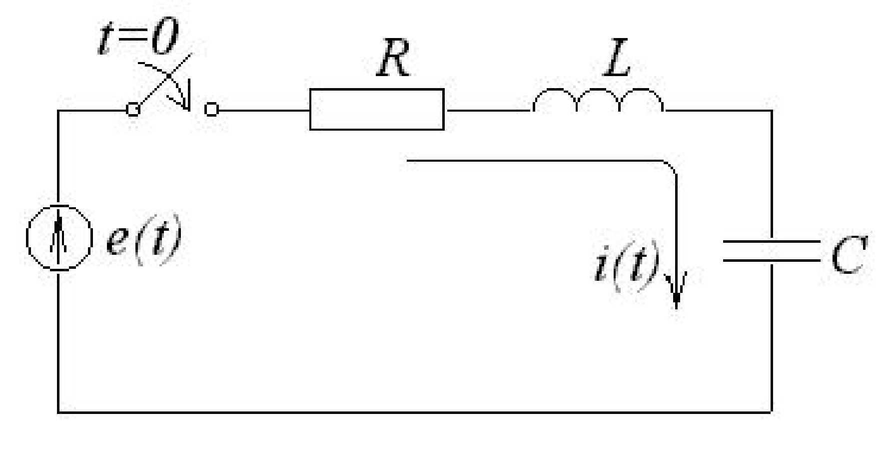
$$U_C = E - U_R - U_L = E[1 - \frac{\omega_0}{\omega_{\text{СВ}}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{СВ}} t + \varphi)]$$



$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_{\text{СВ}}}{\delta}$$

$$T_{CB} = \frac{2\pi}{\omega_{CB}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

б) Если подана переменная ЭДС



$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = e(t),$$

$$e(t) = E_m\cos(\omega t + \psi),$$

$$i_{\text{ПР}}(t) = I_m\cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

$$I_m = \frac{E_m}{|Z|},$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \psi - \varphi) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

$$i(0-) = i_L(0-) = 0 = i_{\text{ПР}}(0) + i_{\text{СВ}}(0).$$

$$I_m\cos(\psi - \varphi) + A_1 + A_2 = 0,$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{e(0)}{L} = \frac{E_m}{L}\cos\psi,$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{di_{\text{м}}}{dt}(0) + \frac{di_{\text{ер}}}{dt}(0) = -\omega I_m\sin(\psi - \varphi) + p_1A_1 + p_2A_2,$$

$$\begin{cases} I_m\cos(\psi - \varphi) + A_1 + A_2 = 0, \\ -\omega I_m\sin(\psi - \varphi) + p_1A_1 + p_2A_2 = \dfrac{E_m}{L}\cos\psi. \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{\omega}{p_1 - p_2}I_m\sin(\psi - \varphi) + \frac{p_2}{p_1 - p_2}I_m\cos(\psi - \varphi) + \frac{E_m}{L(p_1 - p_2)}\cos\psi,$$

$$A_2 = -\frac{\omega}{p_1 - p_2}I_m\sin(\psi - \varphi) - \frac{p_1}{p_1 - p_2}I_m\cos(\psi - \varphi) - \frac{E_m}{L(p_1 - p_2)}\cos\psi.$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{I_m}{p_1 - p_2}\cos(\psi - \varphi)(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) +$$

$$+ \frac{E_m}{L(p_1 - p_2)}\left[\cos\psi + \frac{\omega L}{|Z|}\sin(\psi - \varphi)\right](e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$